تحلیل ارتعاشات آزاد تیر هدفمند دوار باریک‌شوندهٔ دو طرفه با استفاده از تئوری اولر-برنولی و روش تبدیل دیفرانسیلی*

فرزاد ابراهیمی[۱] سمانه دشتی[۲]

چکیده در این مقاله ارتعاشات آزاد تیر هدفمند دوار باریک‌شوندهٔ دو طرفه بررسی شده است. تحلیل ارتعاشات تیر با استفاده از تئوری اولر- برنولی انجام شده است. فرض می‌شود خواص تیر در راستای ضخامت آن با استفاده از تابع توانی تغییر می‌کند. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به‌دست آمده و اثر ضرایب باریک‌شوندگی، پارامترهای بی‌بعد سرعت دورانی، شعاع هاب و شاخص جزء حجمی بر فرکانس طبیعی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل در قالب چندین جدول و شکل ارائه شده و برای صحت‌سنجی، با نتایج کارهای گذشته مقایسه شده است. مقایسهٔ انجام‌شده نشان‌دهندهٔ این واقعیت است که فرکانس‌های طبیعی تیر اولر- برنولی دوار باریک‌شوندهٔ دو طرفه ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی با دقت بالایی حاصل می‌شود. به‌علاوه نتایج حاصل نشان می‌دهد پارامترهای سرعت دورانی، ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی و شاخص جزء حجمی اثر مهمی بر فرکانس طبیعی این‌گونه تیرها دارند. اثر پارامتر شعاع هاب و ضریب باریک‌شوندگی عرضی نیز قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

واژه های کلیدی ارتعاشات آزاد، مواد هدفمند، روش تبدیل دیفرانسیلی، تیر اولر- برنولی باریک‌شونده.

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Double Tapered Beam by using Euler-bernoulli Beam Theory and Differential Transform Method

F. Ebrahimi S. Dashti

Abstract *In this study, the free vibration analysis of a functionally graded rotating double tapered beam is performed. The analysis is based on Euler-Bernoulli beam theory. The Material properties of the beam vary continuously in the thickness direction according to the power-law function. The governing differential equation of motion is derived using the Hamilton's principle. Natural frequencies are obtained using differential transformation (DTM) technique. The effects of the taper ratios, nondimensional rotational speed, nondimensional hub radius and material volume fraction index on the natural frequencies are discussed. Numerical results are tabulated in several tables and figures. To verify the present analysis, the results of this study are compared with the available results from the existing literature. It is shown that the natural frequencies of a functionally graded rotating double tapered Euler-Bernoulli beam can be obtained with high accuracy by using DTM. It was observed that nondimensional rotational speed, height taper ratio and power-law exponent significantly affect the natural frequency. The effects of hub radius and breadth taper ratio on the natural frequencies are negligible.*

Key Words Free vibration, Functionally Graded material, Differential Transform Method, Tapered Euler- Bernoulli beam.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۲/۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۲۲ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره). febrahimy@ikiu.eng.ac.ir

(۲) دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره).

مقدمه

کامپوزیت‌های لایه‌ای به‌علت مزایای قابل‌توجه، کاربرد وسیعی در سازه‌های عمرانی مکانیکی و فضایی دارند. با این وجود مجزا بودن لایه‌های مختلف سبب می‌شود در سطح تماس این لایه‌ها شاهد تغییرات ناگهانی در خواص مواد و پیامدهای نامطلوب آن همانند ایجاد ترک یا جدایی لایه‌ها باشیم. برای مقابله با این نقصان دسته‌ای از کامپوزیت‌ها به نام «مواد هدفمند» (Functionally graded materials) مورد استفاده قرار می‌گیرند. ایدهٔ مواد هدفمند برای اولین بار در سال ۱۹۸٤ در ژاپن مطرح شد. در این مواد یا سازه‌های ساخته شده از این مواد، خواص ماده نسبت به مکان به‌صورتی تغییر می‌کند که کل سازه خواص مطلوب را داشته باشد. نوع متداول مواد هدفمند به‌صورت کامپوزیتی از فلز در ماتریسی از سرامیک می‌باشد. چنین ماده‌ای می‌تواند وظایف ظاهراً ناسازگاری هم‌چون مقاومت حرارتی و خوردگی بسیار بالای سرامیک‌ها از یک سو و استحکام، سفتی و قابلیت ماشین‌کاری بالای فلزات از سوی دیگر را بدون ایجاد نایکنواختی و یا تمرکز تنش به‌صورت یک‌جا دارا باشد. در مواد هدفمند، تغییرات پیوسته مواد و خواص آن می‌تواند در یک جهت یا در تمامی جهات باشد امّا معمولاً برای سادگی تغییرات در یک جهت معین فرض می شود. گذار از یک ماده به مادهٔ دیگر معمولاً با استفاده از یک سری توانی بیان می‌شود. به‌دلیل وجود چنین خواصی مواد هدفمند در بخش‌های گوناگون مهندسی هم‌چون صنایع فضایی، هوایی، دفاع، بیوپزشکی و ساخت اتومبیل‌ها به‌کار رفته‌اند و اخیراً در ابزارهای مورد استفاده در فرآیندهای گداخت هسته‌ای همانند راکتورهای هسته‌ای نیز به‌کار گرفته شده‌اند. به‌دلیل توسعهٔ استفاده از این مواد در دههٔ اخیر، تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ساخته شده از مواد هدفمند مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. بررسی پیشینهٔ پژوهش در مورد مواد هدفمند نشان می‌دهد که بیشتر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه مربوط به صفحات و پوسته‌ها است و تحقیقات کمتری در زمینهٔ تیرهای ساخته شده از این مواد صورت گرفته است. اسنیکر [1] تحلیل الاستیسیته را برای تیرهای اولر- برنولی ساخته شده از مواد هدفمند که در معرض بار عرضی استاتیکی قرار دارند با فرض این‌که مدول یانگ در ضخامت تیر به‌صورت نمایی تغییر می‌کند به‌دست آورد. سیمسک [2] تحلیل استاتیکی تیرهای هدفمند را تحت توزیع بار یکنواخت با روش ریتز به‌دست آورد. ایشان در این بررسی تغییرات خواص مواد را در ضخامت تیر به‌صورت توانی در نظر گرفت و تأثیر این تغییرات را در جابه‌جایی و تنش تیر نشان داد. ایادقدو و تسکین [3] ارتعاشات آزاد یک تیر ساخته شده از مواد هدفمند دارای تکیه‌گاه ساده را با استفاده از تئوری اولر- برنولی و تئوری‌های تغییرشکل برشی مراتب بالا بررسی کردند و در این مطالعه تغییرات مدول یانگ را در ضخامت تیر به‌صورت نمایی و توانی در نظر گرفتند و فرکانس طبیعی و شکل مدهای مربوط به این تیر را با ضرایب لاغری متفاوت به‌دست آوردند. سیمسک [4] ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند را که تحت اثر بار محرک هارمونیک قرار دارد بررسی کرد. او در این مطالعه تغییرات خواص مواد را در ضخامت تیر به‌صورت توانی در نظر گرفت و اثر جابه‌جایی‌های بزرگ، تغییر خواص مواد، سرعت جرم متحرک و فرکانس تحریک را روی جابه‌جایی تیر، ممان خمشی و تنش آن آزمود. ایشان هم‌چنین [5] فرکانس‌های اولیهٔ تیرهای هدفمند را با استفاده از تئوری‌های مراتب بالا به‌دست آورد. سینا و همکاران [6] برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند از یک تئوری جدید که با تئوری سنتی تیرها (تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ اول) متفاوت است استفاده کردند. آنها معادلات حاکم بر حرکت را

با استفاده اصل همیلتون استخراج کردند و اثر شرایط مرزی، جزء حجمی و تغییرشکل برشی را بر فرکانس طبیعی تیر بررسی نمودند. لی [7] یک رویکرد جدید را برای بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای اولر- برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند معرفی کرد. سیمسک و کوکاترک [8] ویژگی‌های ارتعاشات آزاد و اجباری تیر اولر- برنولی هدفمند را تحت بارگذاری هارمونیکی متحرک مورد بررسی قرار دادند. الشربگی و همکاران [9] از روش المان محدود برای تعیین مشخصات ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند محوری (Axially FG beams) استفاده کرد. زونگ و یو [10] حل تحلیلی یک تیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد هدفمند را با تغییرات دلخواه در توزیع خواص ماده مبنی بر تئوری الاستیسیتهٔ دوبعدی به‌دست آوردند. اخیراً دانشمهر و همکاران [11] ارتعاشات تیر اولر- برنولی ساخته شده از مواد هدفمند را که تحت بارگذاری عرضی قرار دارد بررسی کردند. کادولی و همکاران [12] رفتار استاتیکی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا و روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار دادند. مطالعات پیشین روی تیرهای یکپارچه صورت گرفت. تیرهای غیرمنشوری به‌دلیل محاسن خود از نظر زیبایی، مقاومت و بهینه‌سازی وزن سازه دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی می‌باشند. اثر باریک‌شوندگی بر فرکانس طبیعی تیر در مطالعات زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

بازونه [13] اثر باریک‌شوندگی را بر فرکانس طبیعی تیرهای باریک‌شوندهٔ دوار بررسی کرد. زنگ و برت [14] ارتعاشات میله‌های باریک‌شونده (Tapered) را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی بررسی کردند. شهبا و همکاران [15] ارتعاشات آزاد و تحلیل پایداری تیر باریک‌شوندهٔ تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند با تغییر خواص در راستای محوری را تحت شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک با استفاده از روش المان محدود به‌دست آوردند. بازونه و همکاران [16] ویژگی‌های تیرهای تیموشنکوی باریک‌شوندهٔ دوار را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. هونگ و همکاران [17] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی ساخته شده از مواد هدفمند محوری با سطح مقطع غیریکنواخت را مورد مطالعه قرار دادند.

روش تبدیل دیفرانسیلی (Differential transform method) که روشی مبتنی بر بسط سری تیلور است یکی از ابزارهای ریاضیاتی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. این روش ابتدا درسال ۱۹۸٦ توسط زوو [18] در مسائل مهندسی مطرح شد و برای حل مسائل مقدار اولیهٔ خطی و غیرخطی در تحلیل مدارهای الکتریکی به‌کار رفت. استفاده از این روش برای تحلیل ارتعاشات تیرها در تحقیقات زیر مشاهده شد.

ملیک و دنگ [19] این روش را در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی به‌کار بردند. بررسی ویژگی‌های دینامیکی تیرهای باریک‌شوندهٔ دوار همانند فرکانس‌های طبیعی اهمیت ویژه‌ای در طراحی‌های مهندسی شامل ماشین‌های دوار، پره‌های هلیکوپتر و بازوهای مکانیکی ربات دارد، در نتیجه تحلیل تیرهای باریک‌شوندهٔ دوار مورد توجه زیادی قرار گرفته است. ازدمیرو کایا [20] فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر دوار باریک‌شونده اولر- برنولی را با روش تبدیل دیفرانسیلی به‌دست آوردند. کایا و ازگوموس [21] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی چرخان باریک‌شوندهٔ دو طرفه را با روش تبدیل دیفرانسیلی مورد بررسی قرار دادند. بانرژی [22] ارتعاشات آزاد تیرهای با سطح مقطع یکنواخت و نیز باریک‌شونده را تحت نیروی گریز از مرکز و با استفاده از روش ماتریس سفتی مطالعه کرد. عطارنژاد و شهبا [23] روش تبدیل دیفرانسیلی را در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اولر- برنولی دوار غیرمنشوری به‌کار بردند. پایون و سمپایو

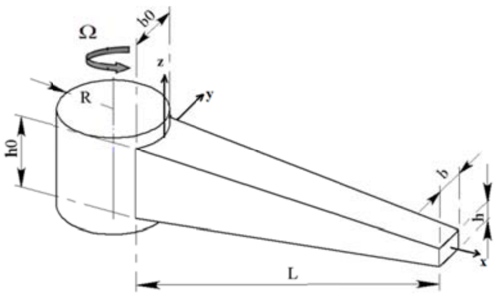
[24] ویژگی‌های دینامیکی تیرهای چرخان ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. شهبا و راجاسکران [25] ارتعاشات آزاد و پایداری تیرهای اولر- برنولی باریک‌شوندهٔ ساخته شده از مواد هدفمند را که در آن‌ها تغییرات خواص مواد در راستای محور تیر می‌باشد، با روش تبدیل دیفرانسیلی تحلیل کردند. در سال‌های اخیر راجاسکران [26] ارتعاشات آزاد تیر داور باریک‌شوندهٔ ساخته شده از مواد هدفمند محوری را با استفاده از تئوری تیموشنکو و روش تبدیل دیفرانسیلی بررسی کرد و نشان داد این روش در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای باریک‌شونده روشی کارآمد می‌باشد. سادونگ و همکاران [27] پاسخ ارتعاشی تیرهای دارای قیود الاستیکی را که از مواد هدفمند با توزیع توانی ساخته شده‌اند و در سطح مقطع خود دارای پله می‌باشند با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به‌دست آوردند. نگویان و گان [28] تغییرشکل خمشی تیر باریک‌شوندهٔ ساخته شده از مواد هدفمند را که دارای بارگذاری در انتها می‌باشد و تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت تیر توسط تابع توانی بیان می‌شود، به‌دست آوردند. انگویان [29] پاسخ تیر یک‌سر گیردار باریک‌شوندهٔ ساخته شده از مواد هدفمند محوری را به جابه‌جایی بزرگ با استفاده از روش المان محدود به‌دست آورد و اثر ضرایب باریک‌شوندگی و نسبت لاغری را بر پاسخ تیر بررسی کرد. پرادهان و چاکراورتی [30] ارتعاشات آزد تیرهای اولر- برنولی و تیموشنکوی ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش ریلی- ریتز بررسی کردند. هم‌چنین ایشان [31] اثر تئوری‌های تغییرشکل برشی را بر فرکانس طبیعی تیر با استفاده از روش ریلی- ریتز بررسی کردند.

همان‌گونه که ذکر شد تیرهای باریک‌شونده به‌دلیل داشتن محاسنی هم‌چون زیبایی و بهینه‌سازی وزن سازه همراه با داشتن استحکام مناسب کاربردهای فراوانی در سازه‌های مکانیکی و عمرانی همانند پره‌های توربین باد، پروانه کشتی و هواپیماها دارند. گاهی در صنعت با مواردی مواجه می‌شویم که قسمت‌های گوناگون سازه باید بارگذاری و شرایط متفاوتی را تحمل کنند برای مثال بخشی از سازه باید سهم بالایی از شوک حرارتی را تحمل نماید. در این‌گونه موارد استفاده از مواد هدفمند در طراحی تیرهای باریک‌شوندهٔ دوار بسیار سودمند است. با توجه به این‌که در زمینهٔ تیرهای هدفمند غیرمنشوری مطالعات انجام شده دارای محدودیت می‌باشد، مطالعهٔ اخیر روی تیرهای هدفمند دوار باریک‌شوندهٔ دوطرفه و با استفاده از تئوری اولر- برنولی انجام شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون به‌دست آمده است. در مقالات پیشین برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرها از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شده است. در این میان به هنگام استفاده از روش‌هایی هم‌چون روش المان محدود نیازمند گسسته‌سازی سیستم می‌باشیم. علاوه بر این در اعمال روش‌های تقریبی همانند روش ریتز و گلرکین گاهی نمی‌توان تمامی مقدارهای ویژه و تابع‌های ویژه را محاسبه کرد. روش سنتی حل مسائل توسط سری تیلور نیز نیازمند محاسبات نمادین می‌باشد و زمان زیادی را برای حل مسائل صرف می‌کند. علاوه بر این حل معادلات مرتبه بالا با استفاده از این روش دشوار می‌باشد. روش تبدیل دیفرانسیلی که در این مقاله به‌کار گرفته شده است، روشی نیمه‌تحلیلی مبتنی بر سری تیلور می‌باشد که توانسته است بر تمامی مشکلات ذکر شده غلبه نماید. این روش بدون نیاز به خطی‌سازی و گسسته‌سازی به معادلات دیفرانسیل جزئی اعمال می‌شود و آن را به مجموعه‌ای از معادلات جبری تبدیل می‌کند. این روش حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش می‌دهد و پاسخ را با دقت و سرعت هم‌گرایی بالا به‌دست می‌آورد. بدین ترتیب با استفاده از این روش فرکانس‌های طبیعی تیر مورد بررسی به‌دست آمده است. اثر پارامترهای مختلفی هم‌چون شعاع هاب γ، سرعت دورانی η، ضرایب باریک‌شوندگی عرضی و

ارتفاعی α، β و شاخص جزء حجمی n بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی شده است. نتایج حاصل با نتایج کارهای گذشته مقایسه شده و تطابق قابل‌قبولی حاصل شده است.

مواد هدفمند

مطابق شکل (۱) تیر یک‌سرگیردار ساخته شده از مادهٔ هدفمند با طول L در نقطهٔ O بر روی یک طوقهٔ (hub) دوار به شعاع R سوار شده است. طوقه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور خود دوران می‌کند. ضخامت تیر از مقدار h_0 در ابتدا تا h در سر آزاد و عرض تیر از مقدار b_0 تا b به‌صورت خطی باریک می‌شود.



شکل ۱ مدل فرض شده برای قرارگیری دستگاه مختصات روی تیر

در دستگاه مختصات راستگرد کارتزین محور x منطبق بر صفحهٔ میانی تیر، محور z در جهت ضخامت تیر و موازی با محور دوران (منطبق بر آن نمی‌باشد) و محور y در جهت عرض در نظر گرفته شده است. فرضیات مورد استفاده به قرار زیر است:

- مقاطع تیر قبل از خمش و پس از آن صفحه و عمود بر محور خنثی باقی می‌مانند.
- تیر از مواد هدفمند به‌صورت ترکیبی از سرامیک و فلز ساخته شده و تغییرات خواص در راستای ضخامت (محورz) است و برای تعیین نحوهٔ تغییرات از مدل توانی استفاده شده است.
- خواص مؤثر مادهٔ تشکیل دهندهٔ تیر همانند مدول یانگ E، چگالی ρ، ضریب پواسن υ و مدول برشی G به‌صورت پیوسته در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند. با استفاده از قاعدهٔ اختلاط، خواص مؤثر ماده P_f به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m \tag{1}$$

در این معادله P_c, P_m، V_c و V_m، خواص مؤثر و کسر حجمی سرامیک و فلز هستند که به‌صورت رابطهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$V_c + V_m = 1 \tag{2}$$

رابطه کسر حجمی سرامیک به‌صورت زیر است:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \tag{3}$$

n شاخص جزء حجمی و متغیری نامنفی است و پروفیل تغییرات ماده در ضخامت تیر را نشان می‌دهد که از طریق آزمایش به‌دست می‌آید. با توجه به روابط (۳-۱) خواص مؤثر مادهٔ هدفمند به‌صورت رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$P_f(z) = (P_c - P_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + P_m \tag{4}$$

مطابق رابطهٔ (٤) زمانی که $z = -h/2$:

$$E = E_m,\ \nu = \nu_m,\ G = G_m,\ \rho = \rho_m$$

زمانی که $z = h/2$:

$$E = E_c,\ \nu = \nu_c,\ G = G_c,\ \rho = \rho_c$$

به‌دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت

همان‌گونه که ذکر شد مطابق شکل (۱) در دستگاه

مختصات راستگرد کارتزین محور x منطبق بر صفحهٔ میانی تیر، محور z در جهت ضخامت تیر و موازی با محور دوران (منطبق بر آن نمی‌باشد) و محور y در جهت عرض در نظر گرفته شده است. مطابق این فرضیات انرژی جنبشی و انرژی کرنش با استفاده از فرض هدگس و داول [32] قابل‌محاسبه است. براساس این فرض، به‌دلیل غالب بودن ε_{xx} بر ε_{yy} و ε_{zz} در محاسبهٔ انرژی کرنش از ترم‌های ε_{yy} و ε_{zz} صرف‌نظر می‌شود. به‌علاوه به‌دلیل نادیده گرفتن اثر برش در تئوری اولر- برنولی از کرنش‌های برشی نیز صرف نظر می‌شود و بدین ترتیب انرژی کرنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U=\int_0^L \frac{1}{2}\ A\ W''^2 dx+\int_0^L \frac{1}{2}\ F(x) W'^2 dx \qquad (۵)$$

در این رابطه w نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی عرضی تیر، علامت ' نشانگر دیفرانسیل بر حسب x و F(x) نیز نیروی گریز از مرکز در فاصلهٔ x از پایهٔ تیر می‌باشد. در معادله (۵) A نشان‌دهندهٔ صلبیت خمشی تیر است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A = \int_A\ E(z) z^2\, dA \qquad (٦)$$

نیروی گریز از مرکز به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$F(x) = \int_x^L B\Omega^2 (R + x) dx \qquad (٧)$$

بدین ترتیب انرژی سینتیک تیر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$T=\int_0^L \frac{1}{2} B\ \dot{W}^2 dx \qquad (٨)$$

در رابطهٔ بالا B اینرسی نرمال تیر است و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$B = \int_A\ \rho(z)\, dA \qquad (٩)$$

با استفاده از اصل همیلتون داریم:

$$\delta\int_{t1}^{t2} (T - U) dt = 0 \qquad (١٠)$$

در این رابطه δ نماد تغییرات می‌باشد. با جایگذاری معادلات (۸ و ۵) در معادلهٔ (۱۰) و انتگرال‌گیری از آن معادله حاکم بر تیر به‌دست می‌آید.

$$B\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial w}{\partial x}\right) = Pw \qquad (١١)$$

p_w نیروی اعمالی در واحد طول تیر است و در این مطالعه چون ارتعاشات آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد مقدار آن صفر در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی مورد استفاده در تحلیل تیر اولر- برنولی یک‌سرگیردار به‌صورت زیر است.

$$x = 0\ , w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (١٢)$$

$$x = L\ , \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad (١٣)$$

با فرض نوسان هارمونیکی ساده برای تیر w به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$w(x, t) = \overline{w}(x) e^{i\omega t} \qquad (١٤)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۴) در رابطهٔ (۱۱) به معادلهٔ زیر خواهیم رسید.

$$-\omega^2 B\ \overline{w} + \frac{d^2}{dx^2}\left(A\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(F\frac{d\overline{w}}{dx}\right) = 0 \qquad (١٥)$$

معادلات تیر باریک‌شونده و پارامترهای بی بعد. معادلات کلی برای تغییرات ارتفاع h(x)، عرض b(x)، مساحت A(x) و ممان اینرسی سطح I(x) که به‌صورت خطی بین دو صفحه تغییر می‌کند به‌صورت زیر می‌باشد.

$$b(x) = b_0\left(1-\alpha\frac{x}{L}\right)^m \quad (\text{الف-۱٦})$$

$$h(x) = h_0\left(1-\beta\frac{x}{L}\right)^s \quad (\text{ب-۱٦})$$

$$A(x) = A_0\left(1-\alpha\frac{x}{L}\right)^m\left(1-\beta\frac{x}{L}\right)^s \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$I_y(x) = I_{y0}\left(1-\alpha\frac{x}{L}\right)^m\left(1-\beta\frac{x}{L}\right)^{3s} \quad (\text{ب-۱۷})$$

در روابط بالا α ضریب باریک‌شوندگی عرضی و β ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی می‌باشد. مقادیر m و s به نوع باریک‌شوندگی تیر بستگی دارد در این مقاله برای مدل کردن باریک‌شوندگی خطی m=۱ و s=۱ در نظر گرفته شده است. زیر نویس $()_0$ مقادیر را در ابتدای تیر نشان می‌دهد بدین ترتیب:

$$A_0 = b_0h_0 \quad (۱۸)$$

$$I_{y0} = \frac{b_0h_0^3}{12} \quad (۱۹)$$

برای مقایسهٔ نتایج مقاله حاضر با مراجع موجود از پارامترهای بی‌بعد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده می‌کنیم.

$$\gamma=\frac{R}{L},\ \xi=\frac{x}{L},\ \widetilde{w}=\frac{\overline{W}}{L},\ \eta^2=\frac{BL^4\Omega^2}{A},\ \mu^2=\frac{BL^4\omega^2}{A} \quad (۲۰)$$

در رابطهٔ بالا γ پارامتر بی‌بعد شعاع هاب، ξ پارامتر بی‌بعد فاصله، η پارامتر بی‌بعد سرعت دورانی تیر، $\widetilde{w}$ پارامتر بی‌بعد تغییرشکل عرضی و μ پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی تیر هستند. با جای‌گذاری معادلات (۲۰-۱٦) در معادلهٔ (٦) نیروی گریز از مرکز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$F(\xi) = B\Omega^2L^2\left[\frac{\alpha\beta}{4}+\gamma-\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\gamma-1)-\frac{1}{3}(\alpha+\beta-\alpha\beta\gamma)-\xi\gamma+\frac{\xi^2}{2}(\alpha\gamma+\beta\gamma-1)+\frac{\xi^3}{3}(\alpha+\beta-\alpha\beta\gamma)-\frac{\xi^4}{4}\alpha\beta\right] \quad (۲۱)$$

با جای‌گذاری پارامترهای بی‌بعد و معادلهٔ (۲۱) در معادلهٔ (۱۵) معادلهٔ حرکت بی‌بعد زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1-\alpha\xi)(1-\beta\xi)^3\frac{d^2\widetilde{w}}{d\xi^2}\right]-\mu^2(1-\alpha\xi)(1-\beta\xi)\widetilde{w}-\eta^2\frac{d}{d\xi}\left\{\left[\frac{\alpha\beta}{4}(1-\xi^4)+\gamma(1-\xi)+\frac{1}{2}(1-\alpha\gamma-\beta\gamma)(1-\xi^2)+\frac{1}{3}(-\alpha-\beta+\alpha\beta\gamma)(1-\xi^3)\right]\frac{d\widetilde{w}}{d\xi}\right\}=0 \quad (۲۲)$$

به‌کارگیری روش تبدیل دیفرانسیلی. به‌سبب مزایای ذکر شده برای روش تبدیل دیفرانسیلی با استفاده از اصول این روش که در جدول (۱) آمده است، معادلات حاکم و شرایط مرزی را به یک دستگاه جبری از معادلات کاهش می‌دهیم و به‌ترتیب زیر حل می‌کنیم. تبدیل دیفرانسیلی تابع y(x) به‌صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود [33].

$$Y[k] = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \quad (۲۳)$$

تبدیل دیفرانسیلی معکوس Y[k] نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$y(x) = \sum_{n+1}^{\infty}x^kY[k] \quad (۲٤)$$

که در روابط بالا y(x) تابع اصلی و Y[k] تابع تبدیل‌یافته است. با استفاده از روابط (۲٤ و ۲۳) داریم:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \quad (۲۵)$$

جدول ۱ روابط اساسی روش تبدیل دیفرانسیلی مطابق مرجع [33]

تابع تبدیل‌یافته	تابع اصلی
$Y[k] = \lambda\Phi[k]$	$y(x) = \lambda\varphi(x)$
$Y[k] = \Phi[k] \pm \Theta[k]$	$y(x) = \varphi(x) \pm \theta(x)$
$Y[k] = (k+1)\Phi[k+1]$	$y(x) = \frac{d\varphi}{dx}$
$Y[k] = (k+1)(k+2)\Phi[k+2]$	$y(x) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$
$Y[k] = \sum_{l=0}^{k}\Phi[l]\Theta[k-l]$	$y(x) = \varphi(x)\theta(x)$
$Y[k] = \delta[k-m] = \begin{cases}1 & k=m \\ 0 & k\neq 0\end{cases}$	$y(x) = x^m$

رابطهٔ (۲۵) نشان‌دهندهٔ این است که مفهوم تبدیل دیفرانسیلی از بسط سری تیلور استخراج شده است. در جدول (۱) روابط اصلی روش تبدیل دیفرانسیلی آمده است. با استفاده از جدول (۱) تبدیل دیفرانسیلی معادلهٔ (۲۲) به‌صورت زیر است.

$$\left[\frac{\alpha\beta}{4}(k+1)(k-2)\eta^2 - \alpha\beta\mu^2\right]W[k-2] + \left[\frac{1}{3}(-\alpha-\beta+\alpha\beta\gamma)\eta^2(k-1)(k+1) + (\alpha+\beta)\mu^2\right]W[k-1] + \left[\alpha\beta^3(k-1)k\,(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(-\alpha\gamma-\beta\gamma+1)k(k+1)\eta^2 - \mu^2\right]W[k] + [-\beta^2(3\alpha+\beta)(k+2)(k+1)^2k + (k+1)^2\gamma\eta^2]\,W[k+1] + \left\{3\beta(\alpha+\beta)(k+1)^2(k+2)^2 + \eta^2(k+1)(k+2)\left[\frac{1}{2}(-1+\alpha\gamma+\beta\gamma) + \frac{1}{3}(\alpha+\beta-\beta\alpha\gamma) - \left(\frac{1}{4}\alpha\beta+\gamma\right)\right]\right\}W[k+2] - [(k+1)(k+2)^2(k+3)(\alpha+3\beta)]W[k+3] + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] = 0 \quad (۲۶)$$

در روابط بالا $W(k)$ فرم تبدیل‌یافتهٔ $W(\xi)$ هستند. با استفاده از جدول (۲) تبدیل دیفرانسیلی شرایط مرزی هم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. لازم به ذکر است که شرایط مرزی تبدیل‌یافته در جدول (۲) طبق اصول روش تبدیل دیفرانسیلی شرایط مرزی برای x=0 با استفاده از معادلهٔ (۲۳) و برای x=1 با استفاده از معادلهٔ (۲۵) به‌دست آمده است.

$$\xi = 0\ ,\quad W[0]=W[1]=0 \quad (۲۷)$$

$$\xi = 1\ ,\quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)W[k] = 0;\ \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\,W[k] = 0 \quad (۲۸)$$

جدول ۲ روابط اساسی تبدیل دیفرانسیلی شرایط مرزی مطابق مرجع [33]

X=1		X=0	
شرایط مرزی تبدیل‌یافته	شرایط مرزی اصلی	شرایط مرزی تبدیل‌یافته	شرایط مرزی اصلی
$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$	f(1)=0	F[0]=0	f(0)=0
$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k] = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	F[1]=0	$\frac{df}{dx}(0) = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F[k] = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 0$	F[2]=0	$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F[k] = 0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1) = 0$	F[3]=0	$\frac{d^3f}{dx^3}(0) = 0$

در روابط (۲۸–۲۶) $W[k]$ فرم تبدیل‌یافتهٔ $W(\xi)$ می‌باشد و با استفاده از معادلهٔ (۲٦) مقادیر $W[k]$ برای k = ٤ ، ۵ ... به‌دست می‌آید. در واقع با جایگذاری مقادیر مختلف برای k در رابطهٔ (۲٦) می‌توانیم مقادیر $W[k]$ را به‌دست آوریم. برای مثال با فرض مقادیر n=۰/۵، γ=۰، L/h=۵، η=٤ مقادیر $W[k]$ به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است.

$$W[2] = c_1$$
$$W[3] = c_2$$
$$W[4] = \frac{2d_2}{3} - \frac{4\alpha d_2}{9} + \frac{\alpha d_3}{2} - \frac{4\beta d_2}{9} + \frac{3\beta d_3}{2} - \frac{\beta^2 d_2}{2} - \frac{\alpha\beta d_2}{6}$$

در معادلات بالا W[2] و W[3] را به‌ترتیب برابر مقادیر ثابت c_1 , c_2 فرض می‌کنیم. به همین ترتیب سایر مقادیر W[k] برحسب c_1 و c_2 قابل‌محاسبه است. سپس مقادیر W[k] را در معادلات شرایط مرزی (۲۸ و ۲۷) جایگزین می‌کنیم بدین ترتیب معادله‌ای به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$M_{j1}^{(n)}c_1 + M_{j2}^{(n)}c_2 = 0\ , j = 1,2,3, n \qquad (۲۹)$$

$M_{j1}^{(n)}$و$M_{j2}^{(n)}$ چند جمله‌ایهایی برحسب ω معادل ترم n ام هستند. فرم ماتریسی معادلهٔ (۲۹) به‌صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (۳۰)$$

بنابراین مقادیر ویژه و در واقع فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (۳۱)$$

با حل معادله (۳۱)، مقادیر $\omega = \omega_i^{(n)}$ به‌دست می‌آیند که نشان‌دهندهٔ فرکانس طبیعی iام می‌باشد که در تکرار nام به‌دست می‌آید. تعداد تکرار با توجه به رابطهٔ زیر و مقدار ε مشخص می‌شود.

$$\left|\omega_i^{(n)} - \omega_i^{(n-1)}\right| < \varepsilon \qquad (۳۲)$$

بدین ترتیب که اگر اختلاف مقدار ω به‌دست آمده در دو مقدار k که نشان‌دهندهٔ دو تکرار می‌باشد، از مقدار ε کوچک‌تر باشد آن مقدار ω به‌عنوان فرکانس طبیعی انتخاب می‌شود. در این مقاله ε=۰/۰۰۰۱ درنظر گرفته شده است که نشان می‌دهد دقت محاسبات ٤ رقم اعشار می‌باشد. بدین ترتیب مقادیر فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و با رعایت الگوریتم تبدیل دیفرانسیلی به‌دست آمده است.

تحلیل نتایج

در این بخش اثر پارامترهای مختلف، ضرایب باریک‌شوندگی α و β، شاخص جزء حجمی n، سرعت دورانی η و شعاع هاب γ بر فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی شده، نتایج به‌دست آمده در قالب چندین جدول و شکل نشان داده شده است و برای صحت‌سنجی نتایج، نتایج حاصل از این بررسی با مقالات موجود مقایسه شده و تطبیق خوبی به‌دست آمده است. تیر مورد بررسی از آلومینیوم و آلومینا ساخته شده است. سطح بالایی سرامیک خالص و سطح پایینی فلز خالص می‌باشد و خواص آن در راستای عرض تیر (محور z) و بر طبق مدل توانی تغییر می‌کند. مشخصات مواد سازنده تیر مورد بررسی در این مقاله در جدول های شماره (٤ و ۳) ارائه شده است.

جدول ۳ خواص مواد سازنده

خواص	واحد	آلومینیوم (Al)	آلومینا (Al_2O_3)
E	GPa	۷۰	۳۸۰
ρ	Kg/m3	۲۷۰۲	۳۹٦۰
ν	–	۰/۳	۰/۳

جدول٤ خواص مواد مطابق مرجع [31]

خواص	واحد	آلومینیوم(Al)	آلومینا(Al_2O_3)
E	GPa	۷۰	۳۸۰
ρ	Kg/m3	۲۷۰۰	۳۸۰۰
ν	–	۰/۲۳	۰/۲۳

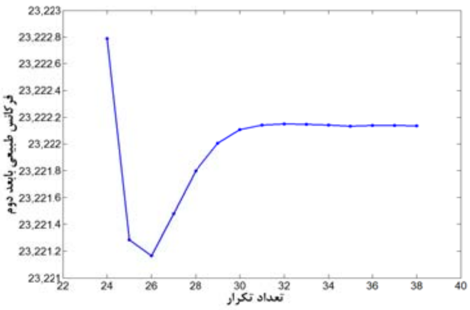
در این مقاله پس از به‌دست آوردن فرکانس طبیعی تیر برای بی‌بعد کردن آن از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود. در رابطهٔ زیر λ فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد.

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \qquad (۳۳)$$

در جدول (٥) هم‌گرایی روش تبدیل دیفرانسیلی برای فرکانس‌های بابعد اول تا چهارم تیر در حالتی که α=٠/٢، β=٠/٢، n=٠، γ=٠، η=٦، L/h=٥ می‌باشد آمده است. لازم به ذکر است ضریب L/h نسبت طول به ارتفاع تیر می‌باشد. هم‌گرایی فرکانس طبیعی دوم در شکل (٢) نیز بررسی شده است. با توجه به جدول (٥) فرکانس طبیعی اول در تکرار ٣٦ فرکانس دوم در تکرار ٣٨ فرکانس سوم و چهارم در تکرار ٣٩ هم‌گرا می‌شود. از بررسی جدول (٥) و شکل (٢) مشهود است که برای تحلیل ارتعاشات تیرهای هدفمند دوار باریک‌شونده روش تبدیل دیفرانسیلی روشی کارآمد و دارای سرعت هم‌گرایی بالا می‌باشد، علاوه بر این با توجه به بررسی‌های انجام شده سرعت هم‌گرایی به ضرایب باریک‌شوندگی و سرعت دورانی تیر وابسته است و با افزایش این پارامترها کاهش می‌یابد.

جدول ٥ بررسی هم‌گرایی فرکانس‌های بابعد اول تا چهارم تیر دوار
(α=٠/٢، β=٠/٢، n=٠، γ=٠، η=٦، L/h=٥)

k	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
٢٤	٦٨٧٤/٥٩٩٨	٢٣٢٢٢/٧٨٧٦	٥٥٥٤٨/٢١٤٢	–
٢٥	٦٨٧٤/٤٨٥١	٢٣٢٢١/٢٨٦٧	٥٥٥٤٩/٧٥٦٤	–
٢٦	٦٨٧٤/٤٦٨١	٢٣٢٢١/١٦٥٧	٥٥٥٥٠/١١٤٦	–
٢٧	٦٨٧٤/٤٨٤١	٢٣٢٢١/٤٧٦٢	٥٥٥٤٩/٨٣٦٧	–
٢٨	٦٨٧٤/٥١١٩	٢٣٢٢١/٧٩٨٤	٥٥٥٤٩/٥٢٤٨	–
٢٩	٦٨٧٤/٥٢٩٩	٢٣٢٢٢/٠٠٥٩	٥٥٥٤٩/٣٢٣٠	–
٣٠	٦٨٧٤/٥٣٨٨	٢٣٢٢٢/١٠٦٧	٥٥٥٤٩/٢١٧١	–
٣١	٦٨٧٤/٥٤٢٢	٢٣٢٢٢/١٤٣٠	٥٥٥٤٩/١٧٤٢	١٠٣٧٨٦/٤٥٢٥
٣٢	٦٨٧٤/٥٤٢٩	٢٣٢٢٢/١٤٩٧	٥٥٥٤٩/١٦٢٤	١٠٣٧٨٨/٤٣٨١
٣٣	٦٨٧٤/٥٤٢٧	٢٣٢٢٢/١٤٦٧	٥٥٥٤٩/١٦٢٢	١٠٣٧٨٨/١٩١٧
٣٤	٦٨٧٤/٥٤٢٤	٢٣٢٢٢/١٤٢٧	٥٥٥٤٩/١٦٤٦	١٠٣٧٨٨/٠٩٦٤
٣٥	٦٨٧٤/٥٤٢٢	٢٣٢٢٢/١٣٤٠	٥٥٥٤٩/١٦٦٧	١٠٣٧٨٨/١٢٠٧
٣٦	٦٨٧٤/٥٤٢٠	٢٣٢٢٢/١٣٨٦	٥٥٥٤٩/١٦٧٩	١٠٣٧٨٨/١٣٠٤
٣٧	٦٨٧٤/٥٤٢٠	٢٣٢٢٢/١٣٨١	٥٥٥٤٩/١٦٨٤	١٠٣٧٨٨/١٣١٨
٣٨	٦٨٧٤/٥٤٢٠	٢٣٢٢٢/١٣٧٩	٥٥٥٤٩/١٦٨٦	١٠٣٧٨٨/١٣٢٤
٣٩	٦٨٧٤/٥٤٢٠	٢٣٢٢٢/١٣٧٩	٥٥٥٤٩/١٦٨٧	١٠٣٧٨٨/١٣٢٧



شکل ۲ بررسی همگرایی فرکانس طبیعی دوم تیر باریک‌شوندهٔ دو طرفهٔ دوار

صحه‌گذاری نتایج. مقایسه نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی تبدیل دیفرانسیلی با دو مرجع [31 , 5] در جدول‌های (۷ و ٦) نشان‌دهنده انطباق قابل‌قبول این تحقیق با مقالات موجود است. برای مقایسه با مرجع [31] در جدول (٦) خواص مواد و درصد اختلاف به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\text{(درصد اختلاف} = 100 \times \frac{|\text{مقاله مرجع} - \text{مقاله حاضر}|}{\text{مقاله حاضر}}\text{)}$$

برای مقایسه با مرجع [31] در جدول (٦) پس از به‌دست آمدن فرکانس طبیعی آن را با استفاده از رابطهٔ زیر بی‌بعد می‌کنیم.

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{I_1}{\int_{-h/2}^{h/2} E dz}}, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \qquad (۳٤)$$

مقایسه‌های انجام شده در جدول (۷) با استفاده از خواص مواد در جدول (۳) و رابطهٔ بی‌بعدکنندهٔ (۳۳) انجام شده است.

جدول ٦ مقایسهٔ فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر یک‌سر گیردار دوار (L/h=۱۰۰ ،η=۰ ،β=۰ ،α=۰ ،n=۰/۳)

مقاله حاضر	مرجع [31]	اختلاف (٪)
۰/۹۹۳	۰/۹۷۷	۱/٦۱

جدول ۷ مقایسهٔ فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر یک‌سر گیردار مدرج تابعی دوار (L/h=۲۰ ،η=۰ ،β=۰ ،α=۰)

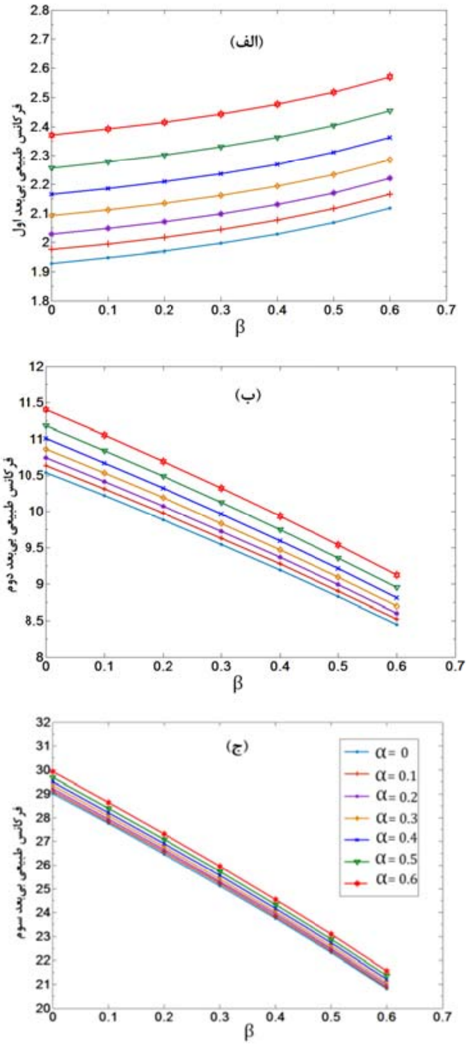
n	مقاله حاضر	مرجع [5]	مرجع [31]	اختلاف (٪)
۰	۱/۹۵۳٤	۱/۹۵۲٤۸	۱/۹۵۲۵	۰/۰٤
۰/۲	۱/۸۳۲۲	۱/۸۱۷۱٤	۱/۸۱۷۱	۰/۸
۰/۵	۱/۷۲٤۷	۱/٦٦۲٦۵	۱/٦٦٤٤	۳/۵۹
فلز کامل	۱/۰۲۱٤	۱/۰۱٤٤۹	–	۰/٦

تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر هدفمند باریک‌شوندهٔ دو طرفهٔ دوار با استفاده از تئوری اولر- برنولی در حالتی که η=۲، L/h=۵، n=۱، γ=۰ می‌باشد، برحسب ترکیب مختلفی از ضرایب باریک‌شوندگی در جدول (۸) و شکل‌های (٤ و ۳) بررسی شده است. از بررسی داده‌های جدول (۸) مشهود است زمانی که ضریب باریک‌شوندگی عرضی و ارتفاعی (α و β) را افزایش می‌دهیم با توجه به این‌که این پارامتر باید از یک کوچک‌تر باشد، فرکانس طبیعی اول افزایش می‌یابد. برای مثال در حالتی که β=۰/۲ با افزایش α از ۰ به ۰/٦ شاهد ۲۲/٦٪ افزایش در فرکانس طبیعی خواهیم بود و در حالتی که α=۰/۲ و β از ۰ به۰/٦ افزایش می‌یابد فرکانس طبیعی ۹/٤۹٪ افزایش می‌یابد. شکل (۳- الف) مؤید این نتیجه می‌باشد. علاوه بر آن در فرکانس طبیعی اول افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی (α) در مقایسه با افزایش ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی (β) اثر بیشتری بر فرکانس طبیعی تیر دارد. فرکانس دوم و سوم با افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی افزایش می‌یابند اما در مقابل با افزایش ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی کاهش می‌یابند. برای بررسی این روند در فرکانس طبیعی سوم در حالتی که β=۰/٤ با افزایش α از ۰ به ۰/٦ شاهد ۳/۳۷٪ افزایش در فرکانس طبیعی خواهیم بود و در حالتی که α=۰/٤ و β از ۰ به ۰/٦

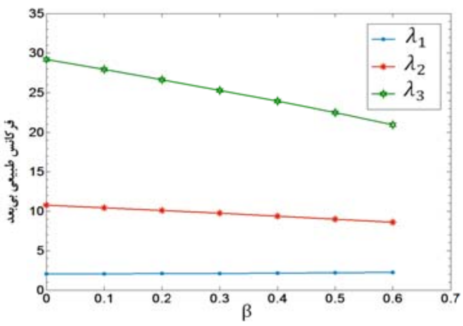
افزایش می‌یابد فرکانس طبیعی ٢٨/١٪ کاهش می‌یابد. از بررسی شکل‌های (٣- ب و ج) نیز مشهود است حساسیت فرکانس دوم و سوم به ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی بیشتر است. بررسی کلی شکل‌های (٣- الف–ج) نشان می‌دهد در فرکانس‌های بالاتر تغییر ضریب باریک‌شوندگی عرضی اثر چندانی بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت و به تعبیر دیگر اثر این پارامتر در فرکانس‌های بالا قابل چشم پوشی است. شکل (٤) نیز نشان‌دهندهٔ آن است که تغییرات ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی در فرکانس‌های بالاتر اثر بیشتری بر فرکانس طبیعی خواهد داشت. پارامترهای دیگری که بر فرکانس طبیعی اثر می‌گذارند، پارامترهای سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) می‌باشند.

جدول ٨ بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر (η=٢، L/h=٥، n=١، γ=٠)

β		α						
		٠	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦
	λ_1	١/٩٢٨٥	١/٩٧٥١	٢/٠٢٨٩	٢/٠٩١٨	٢/١٦٦٨	٢/٢٥٧٩	٢/٣٧١٧
٠	λ_2	١٠/٥٤١٥	١٠/٦٣٦٠	١٠/٧٤٢٩	١٠/٨٦٦٠	١١/٠١٠٨	١١/١٨٦٠	١١/٤٠٧٠
	λ_3	٢٩/٠٢٧٤	٢٩/١١٧٩	٢٩/٢٢٢٠	٢٩/٣٤٤٣	٢٩/٤٩٢٠	٢٩/٦٧٧٢	٢٩/٩٢١٣
	λ_1	١/٩٤٨٠	١/٩٩٤٧	٢/٠٤٨٦	٢/١١١٧	٢/١٨٦٨	٢/٢٧٨١	٢/٣٩٢٢
٠/١	λ_2	١٠/٢١٩٩	١٠/٣١١١	١٠/٤١٤٣	١٠/٥٣٣١	١٠/٦٧٢٩	١٠/٨٤٢٣	١١/٠٥٥٩
	λ_3	٢٧/٧٦٢٩	٢٧/٨٥١٩	٢٧/٩٥٤٠	٢٨/٠٧٣٧	٢٨/٢١٧٩	٢٨/٣٩٨٢	٢٨/٦٣٥١
	λ_1	١/٩٧٠٥	٢/٠١٧٤	٢/٠٧١٥	٢/١٣٤٨	٢/٢١٠١	٢/٣٠١٦	٢/٤١٥٩
٠/٢	λ_2	٩/٨٨٩٠	٩/٩٧٦٨	١٠/٠٧٦٢	١٠/١٩٠٧	١٠/٣٢٥٤	١٠/٤٨٨٨	١٠/٦٩٥٠
	λ_3	٢٦/٤٦٥٨	٢٦/٥٥٣٢	٢٦/٦٥٣٢	٢٦/٧٧٠٢	٢٦/٩١٠٨	٢٧/٠٨٥٩	٢٧/٣١٥٤
	λ_1	١/٩٩٧١	٢/٠٤٤٢	٢/٠٩٨٥	٢/١٦١٩	٢/٢٣٧٥	٢/٣٢٩٣	٢/٤٤٣٩
٠/٣	λ_2	٩/٥٤٧٤	٩/٦٣١٨	٩/٧٢٧٣	٩/٨٣٧٤	٩/٩٦٧١	١٠/١٢٤٣	١٠/٣٢٣٠
	λ_3	٢٥/١٣٠٨	٢٥/٢١٦٣	٢٥/٣١٤١	٢٥/٤٢٨٢	٢٥/٥٦٤٩	٢٥/٧٣٤٧	٢٥/٩٥٦٥
	λ_1	٢/٠٢٨٩	٢/٠٧٦٣	٢/١٣٠٨	٢/١٩٤٦	٢/٢٧٠٤	٢/٣٦٢٥	٢/٤٧٧٥
٠/٤	λ_2	٩/١٩٣٩	٩/٢٧٤٨	٩/٣٦٦٤	٩/٤٧٢١	٩/٥٩٦٥	٩/٧٤٧٥	٩/٩٣٨٥
	λ_3	٢٣/٧٥٠٣	٢٣/٨٣٣٩	٢٣/٩٢٩٢	٢٤/٠٤٠٢	٢٤/١٧٢٨	٢٤/٣٣٧٠	٢٤/٥٥٠٧
	λ_1	٢/٠٦٨١	٢/١١٥٨	٢/١٧٠٧	٢/٢٣٤٨	٢/٣١١١	٢/٤٠٣٦	٢/٥١٩٠
٠/٥	λ_2	٨/٨٢٦٩	٨/٩٠٤٣	٨/٩٩١٩	٩/٠٩٣٠	٩/٢١٢١	٩/٣٥٦٨	٩/٥٤٠٠
	λ_3	٢٢/٣١٤٤	٢٢/٣٩٥٨	٢٢/٤٨٨٥	٢٢/٥٩٦١	٢٢/٧٢٤٣	٢٢/٨٨٢٦	٢٣/٠٨٧٨
	λ_1	٢/١١٧٩	٢/١٦٦٠	٢/٢٢١٤	٢/٢٨٦٠	٢/٣٦٢٧	٢/٤٥٥٧	٢/٥٧١٧
٠/٦	λ_2	٨/٤٤٥٢	٨/٥١٨٩	٨/٦٠٢٥	٨/٦٩٨٩	٨/٨١٢٧	٨/٩٥٠٩	٩/١٢٦١
	λ_3	٢٠/٨٠٩٠	٢٠/٨٨٧٩	٢٠/٩٧٧٦	٢١/٠٨١٥	٢١/٢٠٥٠	٢١/٣٥٧٠	٢١/٥٥٣٢



شکل ۳ بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر هدفمند دوار (γ=۰، n=۱، L/h=۵، η=۲)



شکل ٤ بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی ارتفاعی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر هدفمند دوار (α=۰/۲،γ=۰، n=۱، L/h=۵، η=۲)

در جدول (۹) و شکل‌های (٦ و ٥) نحوهٔ تغییر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا چهارم برحسب تغییرات این دو پارامتر در حالتی که (α=۰/۱، β=۰/۱، γ=۰، L/h=۱۰) نشان داده شده است. با توجه به این‌که با افزایش شاخص جزء حجمی مدول الاستیسیتهٔ تیر کاهش می‌یابد و به تبع آن صلبیت خمشی و سفتی تیر کاهش می‌یابد، با افزایش این پارامتر شاهد کاهش تمامی فرکانس طبیعی تیر هدفمند با شیب تقریباً یکسان خواهیم بود. مطابق شکل (٥) بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به حالت سرامیک (n=۰) و کمترین فرکانس طبیعی مربوط به حالت فلز کامل (n=∞) است. علاوه بر این، این شکل نشان می‌دهد با افزایش سرعت دورانی فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد دلیل این تغییرات متناسب بودن نیروی گریز از مرکز با سرعت دورانی است. شکل (٦) نشان‌دهنده حساسیت فرکانس‌های پایین‌تر به تغییرات سرعت دورانی می‌باشد با توجه به جدول (۹) نیز با افزایش سرعت دورانی از ۰ به ۱۰ درحالی که n=۱ فرکانس اول ۲۰۷/٦٪ و فرکانس چهارم ۱۱/۸٪ افزایش می‌یابند. همان‌گونه که ذکر شد با افزایش سرعت دورانی بی‌بعد (η) فرکانس طبیعی بی‌بعد (λ) افزایش می‌یابد.

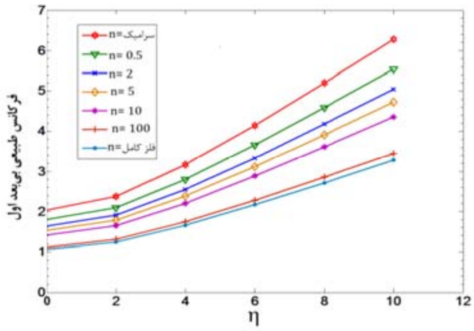
جدول (۱۰) و نمودار (۷) نشان دهنده تغییرات فرکانس طبیعی بابعد (ω) بر اثر تغییرات سرعت دورانی بابعد (Ω) می‌باشد. مشهود است این روند درمورد پارامترهای بابعد نیز صادق است. جدول (۱۱) و نمودار (۸) اثر پارامتر شعاع هاب را بر فرکانس طبیعی بی‌بعد نشان می‌دهد. با توجه به نمودار (۸) فرکانس طبیعی با افزایش شعاع هاب افزایش می‌یابد و این امر به دلیل ارتباط مستقیم نیروی گریز از مرکز با پارامتر شعاع هاب می‌باشد. از آنجا که این نیرو با هر دو پارامتر شعاع هاب و سرعت دورانی متناسب است، با افزایش هم زمان این دو پارامتر فرکانس طبیعی افزایش چشم‌گیری خواهد داشت. برای مثال در حالتی که η=٤ و γ از ۰ به ۱ افزایش پیدا کند، فرکانس اول

١٦٪ افزایش می‌یابد اما با افزایش هم زمان η از ٢ به ٦ و γ از ٠ بـه ١ فرکـانس طبیعـی اول ٦٦٣/٣٪ افـزایش می‌یابد. در جدول (١٢) نیز اثر شعاع هاب بابعد (R) بر فرکانس طبیعی بـابعـد نشـان داده شـده اسـت. نتـایج به‌دست آمده نشان دهنده افزایش فرکانس طبیعی بابعد با افزایش شعاع هاب بابعد می‌باشد.

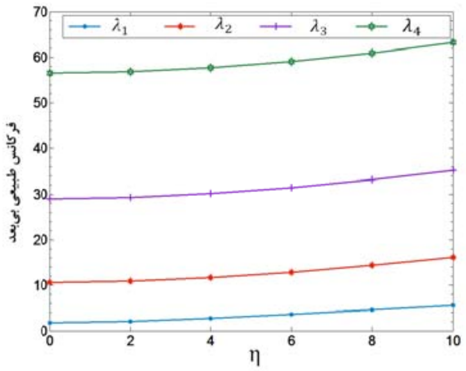
جدول ٩ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) بر فرکانس طبیعی تیر هدفمند دوار
(L/h=١٠ ،γ=٠ ،β=٠/١ ،α=٠/١)

n		η					
		٠	٢	٤	٦	٨	١٠
٠	λ_1	٢/٠٤١٠	٢/٣٧٧٥	٣/١٧٠٠	٤/١٤٩٧	٥/١٩٩٩	٦/٢٧٩٠
	λ_2	١١/٩٧٢٩	١٢/٢٨٩٨	١٣/١٩٥٣	١٤/٥٧٩٨	١٦/٣١٩٤	١٨/٣٠٩٤
	λ_3	٣٢/٨٨٤١	٣٣/١٩٦٧	٣٤/١١٥٨	٣٥/٥٩٠٤	٣٧/٥٤٩٠	٣٩.٩١٣٢
	λ_4	٦٤/١١٢٨	٦٤/٤٣٣٥	٦٥/٣٨٥٠	٦٦/٩٣٧٤	٦٩/٠٤٥٠	٧١/٦٥٢٤
٠/٢	λ_1	١/٩١٤٣	٢/٢٢٩٩	٢/٩٧٣٣	٣/٨٩٢١	٤/٨٧٧١	٥/٨٨٩٣
	λ_2	١١/٢٢٩٧	١١/٥٢٧٠	١٢/٣٧٦٢	١٣/٦٧٤٨	١٥/٣٠٦٥	١٧/١٧٢٩
	λ_3	٣٠/٨٤٢٩	٣١/١٣٦١	٣١/٩٩٨٢	٣٣/٣٨١٣	٣٥/٢١٨٣	٣٧/٤٣٥٨
	λ_4	٦٠/١٣٣٢	٦٠/٤٣٤٠	٦١/٣٢٦٥	٦٢/٧٨٢٥	٦٤/٧٥٩٣	٦٧/٢٠٤٩
٠/٥	λ_1	١/٨٠٢١	٢/٠٩٩١	٢/٧٩٨٩	٣/٦٦٣٨	٤/٥٩١١	٥/٥٤٣٨
	λ_2	١٠/٥٧١١	١٠/٨٥٠٩	١١/٦٥٠٣	١٢/٨٧٢٧	١٤/٤٠٨٧	١٦/١٦٥٧
	λ_3	٢٩/٠٣٣٩	٢٩/٣٠٩٩	٣٠/١٢١٤	٣١/٤٢٣٣	٣٣/١٥٢٦	٣٥/٢٤٠٠
	λ_4	٥٦/٦٠٦٢	٥٦/٨٨٩٣	٥٧/٧٢٩٥	٥٩/١٠٠١	٦٠/٩٦٠٩	٦٣/٢٦٣٠
١	λ_1	١/٧١٢٤	١/٩٩٤٧	٢/٦٥٩٧	٣/٤٨١٦	٤/٣٦٢٧	٥/٢٦٨٠
	λ_2	١٠/٠٤٥٢	١٠/٣١١١	١١/٠٧٠٨	١٢/٢٣٢٤	١٣/٦٩١٩	١٥/٣٦١٥
	λ_3	٢٧/٥٨٩٦	٢٧/٨٥١٩	٢٨/٦٢٣٠	٢٩/٨٦٠٢	٣١/٥٠٣٤	٣٣/٤٨٧٠
	λ_4	٥٣/٧٩٠٣	٥٤/٠٥٩٤	٥٤/٨٥٧٨	٥٦/١٦٠٢	٥٧/٩٢٨٥	٦٠/١١٦١
٢	λ_1	١/٦٤٢٦	١/٩١٣٤	٢/٥٥١٢	٣/٣٣٩٦	٤/١٨٤٩	٥/٠٥٣٣
	λ_2	٩/٦٣٥٨	٩/٨٩٠٨	١٠/٦١٩٥	١١/٧٣٣٨	١٣/١٣٣٨	١٤/٧٣٥٤
	λ_3	٢٦/٤٦٥٠	٢٦/٧١٦٦	٢٧/٤٥٦٣	٢٨/٦٤٣١	٣٠/٢١٩٣	٣٢/١٢٢١
	λ_4	٥١/٥٩٧٨	٥١/٨٥٥٩	٥٢/٦٢١٧	٥٣/٨٧١٠	٥٥/٥٦٧٢	٥٧/٦٦٥٧
٥	λ_1	١/٥٣٧٦	١/٧٩١١	٢/٣٨٨٢	٣/١٢٦٢	٣/٩١٧٤	٤/٧٣٠٣
	λ_2	٩/٠١٩٨	٩/٢٥٨٥	٩/٩٤٠٧	١٠/٩٨٣٧	١٢/٢٩٤٣	١٣/٧٩٣٤
	λ_3	٢٤/٧٧٣٣	٢٥/٠٠٨٧	٢٥/٧٠١٢	٢٦/٨١٢١	٢٨/٢٨٧٦	٣٠/٠٦٨٧
	λ_4	٤٨/٢٩٩٤	٤٨/٥٤١٠	٤٩/٢٥٧٩	٥٠/٤٢٧٤	٥٢/٠١٥١	٥٣/٩٧٩٤
١٠	λ_1	١/٤١٩٤	١/٦٥٣٣	٢/٢٠٤٥	٢/٨٨٥٨	٣/٦١٦١	٤/٣٦٦٥
	λ_2	٨/٣٢٦٢	٨/٥٤٦٦	٩/١٧٦٣	١٠/١٣٩١	١١/٣٤٨٩	١٢/٧٣٢٧
	λ_3	٢٢/٨٦٨٣	٢٣/٠٨٥٧	٢٣/٧٢٤٩	٢٤/٧٥٠٣	٢٦/١١٢٤	٢٧/٧٥٦٥
	λ_4	٤٤/٥٨٥٤	٤٤/٨٠٨٤	٤٥/٤٧٠٢	٤٦/٥٤٩٧	٤٨/٠١٥٤	٤٩/٨٢٨٦
٥٠	λ_1	١/١٧٦٢	١/٣٧٠٠	١/٨٢٦٧	٢/٣٩١٣	٢/٩٩٦٥	٣/٦١٨٣
	λ_2	٦/٨٩٩٤	٧/٠٨٢٠	٧/٦٠٣٨	٨/٤٠١٦	٩/٤٠٤١	١٠/٥٥٠٩
	λ_3	١٨/٩٤٩٦	١٩/١٢٩٧	١٩/٦٥٩٣	٢٠/٥٠٩١	٢١/٦٣٧٧	٢٣/٠٠٠١

	λ_4	۳۶/۹۴۵۲	۳۷/۱۳۰۰	۳۷/۶۷۸۳	۳۸/۵۷۲۹	۳۹/۷۸۷۴	۴۱/۲۸۹۹
۱۰۰	λ_1	۱/۱۲۳۰	۱/۳۰۸۱	۱/۷۴۴۲	۲/۲۸۳۲	۲/۸۶۱۰	۳/۴۵۴۷
	λ_2	۶/۵۸۷۶	۶/۷۶۱۹	۷/۲۶۰۱	۸/۰۲۱۹	۸/۹۷۹۱	۱۰/۰۷۴۰
	λ_3	۱۸/۰۹۳۰	۱۸/۲۶۵۰	۱۸/۷۷۰۷	۱۹/۵۸۲۱	۲۰/۶۵۹۷	۲۱/۹۶۰۵
	λ_4	۳۵/۲۷۵۳	۳۵/۴۵۱۷	۳۵/۹۷۵۳	۳۶/۸۲۹۴	۳۷/۹۸۹۰	۳۹/۴۲۳۶
فلز کامل	λ_1	۱/۰۶۷۲	۱/۲۴۳۲	۱/۶۵۷۶	۲/۱۶۹۸	۲/۷۱۹۰	۳/۲۸۳۲
	λ_2	۶/۲۶۰۶	۶/۴۲۶۳	۶/۸۹۹۷	۷/۶۲۳۷	۸/۵۳۳۳	۹/۵۷۳۹
	λ_3	۱۷/۱۹۴۹	۱۷/۳۵۸۳	۱۷/۸۳۸۹	۱۸/۶۱۰۰	۱۹/۶۳۴۱	۲۰/۸۷۰۳
	λ_4	۳۳/۵۲۴۱	۳۳/۶۹۱۸	۳۴/۱۸۹۴	۳۵/۰۰۱۱	۳۶/۱۰۳۲	۳۷/۴۶۶۶



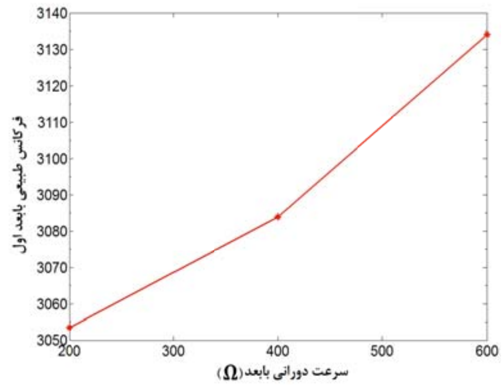
شکل ۵ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) بر فرکانس بی‌بعد اول تیر هدفمند دوار (α=۰/۱، β=۰/۱، γ=۰، L/h=۱۰)



شکل ٦ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) بر فرکانس اول تا چهارم تیر هدفمند دوار (α=۰/۱، β=۰/۱، γ=۰، L/h=۱۰، n=۰/۵)

جدول ۱۰ بررسی اثر سرعت دورانی بابعد (Ω) بر فرکانس طبیعی بابعد (ω)
(α=۰/۳، β=۰/۲ ، n=۱، γ=۰/۲)

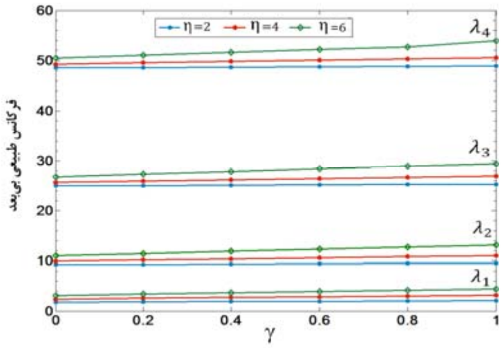
	Ω= ۲۰۰	Ω= ۴۰۰	Ω= ۶۰۰
ω_1	۳۰۵۳/۳۹۷۹	۳۰۸۳/۸۹۲۳	۳۱۳۴/۰۲۶۹
ω_2	۱۶۱۹۷/۰۲۹۱	۱۶۲۲۴/۴۱۳۱	۱۶۲۶۹/۹۵۱۸
ω_3	۴۳۲۰۹/۴۴۷۸	۴۳۲۳۶/۳۲۹۶	۴۳۲۸۱/۰۹۲۷



شکل ۷ بررسی اثر سرعت دورانی بابعد (Ω) بر فرکانس طبیعی بابعد تیر هدفمند دوار
(γ=۰/۲ ،n=۱ ، β=۰/۲ ،α=۰/ ۳)

جدول ۱۱ بررسی اثر شعاع هاب بی بعد بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر هدفمند دوار
(L/h=۱۰ ،β=۰/۱ ،α=۰/۱ ،n=۵)

η		γ					
		۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
۳	λ_1	۱/۷۹۱۱	۱/۸۵۲۲	۱/۹۱۱۳	۱/۹۶۸۷	۲/۰۲۴۳	۲/۰۷۸۵
	λ_2	۹/۲۵۸۵	۹/۳۲۱۲	۹/۳۸۳۵	۹/۴۴۵۳	۹/۵۰۶۸	۹/۵۶۷۸
	λ_3	۲۵/۰۰۸۷	۲۵/۰۷۴۱	۲۵/۱۳۹۲	۲۵/۲۰۴۱	۲۵/۲۶۸۹	۲۵/۳۳۳۴
	λ_4	۴۸/۵۴۱۰	۴۸/۶۰۹۷	۴۸/۶۷۸۳	۴۸/۷۴۶۸	۴۸/۸۱۵۲	۴۸/۸۸۳۴
۴	λ_1	۲/۳۸۸۲	۲/۵۶۶۱	۲/۷۳۲۱	۲/۸۸۴	۳/۰۳۶۴	۳/۱۷۷۳
	λ_2	۹/۹۴۰۷	۱۰/۱۷۲۰	۱۰/۳۹۷۸	۱۰/۶۱۸۵	۱۰/۸۳۴۵	۱۱/۰۴۶۰
	λ_3	۲۵/۷۰۱۲	۲۵/۹۵۳۶	۲۶/۲۰۳۱	۲۶/۴۴۹۹	۲۶/۶۹۴۰	۲۶/۹۳۵۶
	λ_4	۴۹/۲۵۷۹	۴۹/۵۲۷۵	۴۹/۷۹۵۴	۵۰/۰۶۱۵	۵۰/۳۲۶۰	۵۰/۵۸۸۸
۶	λ_1	۳/۱۲۶۲	۳/۴۲۵۵	۳/۷۰۰۱	۳/۹۵۵۲	۴/۱۹۴۳	۴/۴۲۰۱
	λ_2	۱۰/۹۸۳۷	۱۱/۴۴۸۵	۱۱/۸۹۴۰	۱۲/۳۲۲۱	۱۲/۷۳۴۸	۱۳/۱۳۳۶
	λ_3	۲۶/۸۱۲۱	۲۷/۳۵۰۳	۲۷/۸۷۶۴	۲۸/۳۹۱۱	۲۸/۸۹۴۹	۲۹/۳۸۸۶
	λ_4	۵۰/۴۲۷۴	۵۱/۰۱۵۶	۵۱/۵۹۵۸	۵۲/۱۶۸۳	۵۲/۷۳۳۲	۵۳/۲۹۰۹



شکل ۸ بررسی اثر شعاع هاب بر فرکانس طبیعی تیر هدفمند دوار

جدول ۱۲ بررسی اثر شعاع هاب بابعد (R) بر فرکانس طبیعی بابعد (ω) تیر هدفمند دوار
(η=۲ ،n=۱ ، β=۰/۳ ،α=۰/ ۳)

	R= ۵	R= ۱۰	R= ۱۵
ω_1	٦٥٢٦/٣٦٣٤	٨٥٠٦/١٥٠١	١٠٠٩٢/٧٢٧٢
ω_2	١٩٩٢٨/٥٩٧٦	٢٣١٦٠/١١٤٧	٢٥٩٧٤/١١٣٨
ω_3	٤٥٦٨٥/٩٨٠٨	٤٩٥٤٦/٩١٧٠	٥٣٠٩٣/٤٧٣١

نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش تبدیل دیفرانسیلی و تئوری اولر- برنولی برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر باریک‌شوندهٔ دوطرفه ساخته شده از مواد هدفمند استفاده شد و با استفاده از این روش، فرکانس‌های طبیعی آن به‌دست آمد. اثر پارامترهای شعاع هاب γ، سرعت دورانی η، ضرایب باریک‌شوندگی عرضی و ارتفاعی α و β و شاخص جزء حجمی n بر فرکانس‌های طبیعی تیر نیز بررسی شد. نتایج حاصل با نتایج کارهای گذشته مقایسه شد و تطابق قابل‌قبولی به‌دست آمد. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهندهٔ موارد زیر می‌باشد.

- روش تبدیل دیفرانسیلی روشی کارآمد و با سرعت هم‌گرایی بالا برای تحلیل ارتعاشات تیرهای دوار باریک‌شوندهٔ ساخته شده از مواد هدفمند می‌باشد.
- افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی و ارتفاعی سبب افزایش فرکانس طبیعی اول می‌شود و فرکانس اول نسبت به تغییرات ضریب باریک‌شوندگی عرضی حساس‌تر است. در فرکانس‌های بالاتر افزایش ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی سبب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی سبب افزایش فرکانس طبیعی خواهد شد و حساسیت فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی در فرکانس‌های بالاتر بیشتر است.
- با افزایش شاخص جزء حجمی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. با تغییر مقدار شاخص جزء حجمی می‌توان مدول الاستیسیته و خواص ارتعاشاتی تیر هدفمند را تغییر داد.
- افزایش شعاع هاب باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود اما اثر محسوسی بر آن ندارد.
- افزایش سرعت دورانی باعث افزایش فرکانس

طبیعی می‌شود و حساسیت فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر به تغییرات پارامتر سرعت دورانی بیشتر می‌باشد. علاوه بر این افزایش هم‌زمان شعاع هاب و سرعت دورانی اثر چشم‌گیری بر فرکانس طبیعی دارد.

مراجع

1. Sankar, B.V., "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 689–696, (2001).
2. Şimşek, M. "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method", *Int. J. Eng. Appl. Sci.*, Vol. 1, pp.1-11, (2009).
3. Aydogdu M. and Taskin, V., "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply suportededges", *Material and Design*, Vol. 28, No. 5, pp. 1651-1656, (2007).
4. Şimşek, M., "Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2532-2546, (2010).
5. Şimşek, M., "Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, No. 4, pp. 697-705, (2010).
6. Sina, S.A., Navazi, H.M and Hadadpour, H., "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Material and Design*, Vol. 30, No. 3, pp.741-747, (2009)
7. Li, X-F. "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4, pp. 1210-1229, (2008).
8. Şimşek, M. and T. Kocatürk. "Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load", *Composite Structures*, Vol. 90, No. 4, pp. 465-473, (2009).
9. Alshorbagy, A.E., Altaher, M.A. and Mahmoud, F.F., "Free vibration characteristics of a functionally beam using inite element method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 1, pp. 412-425, (2011).
10. Zhong Z. and Yu T., "Analytical solution of cantilever functionally graded beam", *Composites Sciences and Technology*, Vol. 67, No. 3-4, pp. 481-488, (2007).
11. Daneshmehr, A.R., Hadi, A., and Mehrian, S.N., "Investigation of Elastoplastic Functionally Graded Euler-Bernoulli Beam Subjected to Distribute Transverse Loading", *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, Vol. 2 , No.10, pp. 10628-34, (2012).
12. Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N., "Static analisis of functionally graded beam using higher order shear deformation theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 32, No. 12, pp. 2509-2525, (2008).
13. Bazoune, A., "Effect of tapering on natural frequencies of rotating beams", *Shock and Vibration*, Vol. 14, No. 3, pp. 169-179, (2007).
14. Zeng, H., and Bert, C.W., "Vibration analysis of a tapered bar by differential transformation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, pp. 737–739, (2001).

15. Shahba, A., Attarnejad, R., TavanaieMarvi, M., Hajilar, S., "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 42, pp.801–808, (2011).
16. Bazoune, A., Khulief, Y.A. and Stephen, N.G., "Further results for modal character- istics of rotating tapered timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 157–174, (1999).
17. Huang, Y., Yang, L.E., Luo, Q.Z., "Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 42, pp. 801-8, (2013).
18. Zhou, J.K., "*Differential Transformation and its application for Electrical Circuits*", Huazhong University Press, Wuhan China, (1986), (in Chinese).
19. Malik, M. and Dang, H.H.,"Vibration analysis of contin- uons system by differeftial transformation", *Appl Math Comput*, Vol. 96, pp. 17-26, (1998).
20. Ozdemir, O. and Kaya, M.O., "Flapwise bending vibration analysis of a rotating taperded cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", *Journal of Sound and Vibration* , Vol. 289, pp. 413-420, (2006).
21. Ozgumus, O.O. and Kaya, M.O., "Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Timoshenko beam", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 78, pp. 379-392, (2008).
22. Banerjee, J.R., "Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, pp. 857-875, (2000).
23. Attarnaejad, R. and Shahba, A., "Application of differential transform method in free vibration Analysis of rotating non-prismatic beams", *World Appl. Sci. J.*, Vol. 5, pp. 441–448, (2008).
24. Piovan, M.T. and Sampaio, R., "A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 327, pp. 134-143, (2009).
25. Shahba, A. and Rajasekaran, S., "Free vibration and stability of Euler-Bernoulli beams made of axialliy functionally graded material", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 7, pp. 3094-3111, (2012).
26. Rajasekaran, S., "Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods", *Applied Matematical Modelling*, Vol. 37, pp. 4440-4463, (2013).
27. Suddoung, K., Charoensuk, J., and Wattanasakulpong, N., "Vibration response of stepped FGM beams with elastically end constraints using differential transformation", *Applied Acoustics*, Vol. 77, pp. 20-28, (2014).
28. Nguyen, D.K., and Gan, B.S., "Large deflections of tapered functionally graded beams subjected to end forces", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 11, pp. 3054-3066, (2013).
29. Nguyen, D.K., "Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 298-305, (2013).
30. Pradhan, K.K. and Chakraverty, S., "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh – Ritz method", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 175-184, (2013).
31. Pradhan, K.K., and Chakraverty, S., "Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 82, pp.149-160, (2014).

32. Hodges, D.H. and Dowell, E.H. "Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades", NASA TN D-7818, (1974).
33. Abdel-Halim Hassan, I.H., "On solving some eigenvalue-problems by using a differential transformation", *Appl. Math. Comput.*, Vol. 127, pp. 1–22, (2002).